Les transformations canoniques

Les transformations sont générées par $F(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)$ = *fonction génératrice*

On considère traditionnellement quatre classes de transformations

$$F_1(q_i, Q_i, t) \qquad F_2(q_i, P_i, t) \qquad F_3(p_i, Q_i, t) \qquad F_4(p_i, P_i, t)$$

$$\boxed{\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i; t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i; t) + dF(q_i, p_i; Q_i, P_i; t)/dt}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{aligned}}$$

Les transformations canoniques

Pour vérifier qu'une transformation est canonique : $Q_i(q,p,t)$ $P_i(q,p,t)$

1) intégrer explicitement la transformation, i.e. trouver la fonction génératrice

   Si F existe <-> la transformation est canonique par construction

2) vérifier que sa matrice Jacobienne est symplectique

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^tMJM = J$$

3) Vérifier que le crochet de Poisson satisfait :

$$\begin{cases} \{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \\ \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}\,. \end{cases}$$

4) vérifier que les équations du mouvement ont la forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \qquad \frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial K}{\partial P_i}.$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi

Est-il possible de trouver une fonction génératrice F telle que le nouvel Hamiltonien

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Soit nul, K=0 ?

Si oui, les nouvelles coordonnées Q_i et P_i sont des intégrales du mouvement et la dynamique est déterminée par la transformation inverse.

$$\begin{cases} q_i(Q, P, t) \\ p_i(Q, P, t) \end{cases}$$

On travaille avec $F_2(q_i, P_i; t)$

$$\begin{cases} p_i &= \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i &= \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i} \\ H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} &= 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0}$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi

L'équation aux dérivées partielles

$$\boxed{H\left(q_1,\ldots,q_n,\frac{\partial f}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial q_n},t\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=0}$$

est l'équation d'Hamilton-Jacobi pour $f(q_1,\ldots,q_n,t)$

n+1 dérivées partielles -> n+1 constantes d'intégration dans la solution
f apparaît uniquement en dérivées et donc f+const. est une solution.

La solution générale, si elle existe, s'écrit

$$f(q_1,\ldots,q_n,t)=S\left(q_1,\ldots,q_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n;t\right)+\alpha_{n+1}$$

On résout le problème initial en considérant la fonction génératrice

$$F_2(q_1,\ldots,q_n,P_1,\ldots,P_n;t)\equiv S(q_1,\ldots,q_n,\alpha_1{=}P_1,\ldots,\alpha_n{=}P_n;t)$$

Note: la fonction S est une action.